最大値最小値を求める

ここで扱うのは最大値や最小値を求める問題です．一見したところ厄介ではないように思えますが，意外と落とし穴があるところだと思います．基本は，変数を設定して，関係式を求め，出てきた関数の増減を調べたりすることで値を求めることになりますが，増減を調べるときの式変形が慣れてないと難しいというものがあります．

―――――――――――――――――――――――――――――

冒頭でも述べた通り，最大値最小値を求める問題では，

① 変数が設定されてなかったら設定する．

② 問題の満たすべき関係式を過不足なく立式する．

③ 変数で整理して最大・最小が求めれる形にする．

というのが基本となります．

Step1 の変数を設定するというのは，問題文に設定されていればそれを使えばよいのですが，場合によっては与えられた変数では，式がややこしくなったり，最大・最小が求められなかったりする場合があるので，そういう場合は適宜自分で設定し直します．Step2 の過不足なく立式するのは与えられた問題文の状況設定を的確に掴み，漏れが無いように注意！不足していると，解けない場合が多いので，一通り立式して Step3 に進もんでも，過不足が無いかを確認しながら進むと良いと思います．不足してる場合は，Step3 をやっているうちに，気付くはずです．さて，問題は Step3 なのですが，例えば，出てきた式が２次関数のような場合であれば，平方完成すればよいことはわかります．しかし，式が複雑になってくると，どうすればよいのか分からなくなってくる場合がでてきます．ここでは，そういう場合の指針を述べておくことにします．

i) 変数が出てくる箇所を減らす（重要）

●$y=x^2+x+1$　←変数は２箇所

$=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$　←変数は１箇所！

●$y=x^3+3x^2+3x$　←変数は３箇所

$=(x+1)^3-1$　←変数は１箇所

●$y=\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x+1}$　←変数は４箇所

$=1+\dfrac{1}{x^2-x+1}$　←変数は２箇所

$=1+\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$　←変数は１箇所！

●$y=\dfrac{x}{x^2+9x+4}$　←変数は３箇所

$=\dfrac{1}{x+\frac{4}{x}+9}$　変数は２箇所！

●$y=\sin x+\cos x$　←変数は２箇所

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　←変数は１箇所！

●$y=\sin^2 x+2\sin x\cos x+5\cos^2 x$　←変数は４箇所

$=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x+5\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$=\sin 2x+2\cos 2x+3$　←変数は２箇所

$=\sqrt{5}\sin(2x+\alpha)+3$　←変数は１箇所！

●$y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$　←変数は２箇所

$=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2 x}$

$=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}$　←変数は１箇所！

三角関数の場合は，また別の問題も生じてきて，同値関係にある式がいくつかあるために，どのように式変形していけば良いのかがわからなくなるという事態がでてきます．これは問題を解いていく中で，経験して会得していくことになりますが，その際，場合によっては意識的に覚えるのも良いでしょう．一番最後の例のように，一度変数の出てくる箇所を３個に増やして結果的には１箇所にするといったこともあるので注意が必要です．三角関数でなる式の最大最小を求める問題に対峙したときは，役立つかどうか分からないけど，とりあえず自分が今できる変形をしてみるということが肝要です．

ii) 既知の不等式を用いる

● 相加相乗の関係の不等式:$x+y\geqq 2\sqrt{xy}$

● チェビシェフ：$a\leqq b, p\leqq q$ のとき，$ap+bq\geqq aq+bp$

● シュワルツの不等式：$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

例１

x, y は実数とする．

(1)$x+3y=1$ を満たすとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ．

(2)$x^2+y^2=4$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値，最小値を求めよ．

いろんな解き方ができます，一応シュワルツの不等式を使ってみました．

（解）(1) シュワルツの不等式より，

$(x^2+y^2)(1^2+3^2)\geqq(x\cdot 1+y\cdot 3)^2$

$\therefore x^2+y^2\geqq\dfrac{1}{10}$

等号成立は，$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3}$ かつ $x+3y=1$ のとき，即ち $x=\dfrac{1}{10}, y=\dfrac{3}{10}$ のとき．

(2) シュワルツの不等式より，

$(x^2+y^2)(2^2+1^2)\geqq(x\cdot 2+y\cdot 1)^2$

$20\geqq(2x+y)^2$

$\therefore -2\sqrt{5}\leqq 2x+y\leqq 2\sqrt{5}$

等号成立は，$\dfrac{x}{2}=y$ かつ $x^2+y^2=4$ のとき．

よって，

$(x,y)=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$

$(x,y)=\left(-\dfrac{4}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき最小値 $-2\sqrt{5}$

iii) 微分する

iv) 存在条件を求める問題にすりかえる

例 2

$y = x^2 + x + 1$ の最小値を求めよ.

もちろん普通は平方完成しますが，雰囲気を掴むために，iv) の考え方で解いてみます.

（解）$x^2 + x + 1 - y = 0$

x がすべての実数を動くときの y の条件を求める．判別式を D とすると，

$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - y) \geqq 0$

$\therefore y \geqq \dfrac{3}{4}$

（x に範囲が指定されている場合は，軸の位置や端点などの特殊な値を考えていく）

特に，２変数関数 $f(x, y)$ の最大・最小を求める場合，

「適当な１つの文字を変数とみて（残りは定数とみて），仮の最大値を求め，その下で，次に定数とみた文字を，変数とみて，真の最大値をもとめる」

という手法をとります.

Step1　一つの文字を変数とみて仮の最大値を求める

Step2　残りの文字を変数とみて真の最大値を求める

という流れをしっかり頭の中に叩き込んでおきましょう．もちろん，どの文字を先に変化させるかは，そのときの式の形によります.

不等式を示す

基本的には，最大値・最小値を求めるのと同じやり方でいけます．つまり，$A \leqq B$ という不等式を証明せよと言われた場合，$f = B - A$ とおいて，f が 0 以上であることを言えばよいことになりますが，0 以上であることを示すのに，最大値・最小値を求めるときに述べた i)〜iii) の手法を用いることになるわけです．シュワルツの不等式を示すときなど特殊な場合には，iv) を用いることもありますが，一般的な不等式の証明においては，あまり用いることはないでしょう．証明する不等式が２変数あるいは多変数の場合も Step1,Step2 の流れで示せます．ただ，不等式の場合の特殊な方法もあるので，ざっと目を通しておきましょう.

①１つの変数についての関数と考え，その増減を調べる.（残りの変数は定数扱いする.）

②帰納法を用いる

③グラフの凸性を用いる

$f''(x) < 0$ ならば，

$$\frac{1}{n}\{f(x_1) + \cdots + f(x_n)\} \geqq f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

が成立する.

(できる限り証明して用いるのが良い.)

④その他

・相加相乗, チェビシェフ, シュワルツの不等式を用いる.

・図形量とみて，大小関係を調べる.

例 3

$0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$ のとき，３数

$P = abc + 2,$

$Q = \dfrac{1}{2}(bc + ca + ab + 3),$

$R = a + b + c$

の大小を比較せよ.

まずはとにもかくにも具体的に数値を代入してあたりをつけてみましょう．$a = b = c = \dfrac{1}{2}$ としてみると，$P = \dfrac{17}{8}, Q = \dfrac{15}{8}, R = \dfrac{12}{8}$ であるので，$P \geqq Q \geqq R$ であることが予想されます.

（解）$P - Q = abc + 2 - \dfrac{1}{2}(bc + ca + ab + 3)$

a について整理すると，

$P - Q = \left(bc - \dfrac{1}{2}b - \dfrac{1}{2}c\right)a - \dfrac{1}{2}bc + \dfrac{1}{2}\ (= f(a))$

よって，$y = f(a)$ のグラフは直線となる．$0 < a < 1$ で $f(a) \geqq 0$ を示すためには，$f(0) \geqq 0, f(1) \geqq 0$ を示せばよい。

$f(0) = \dfrac{1}{2}(1 - bc) > 0$

$f(1) = \dfrac{1}{2}bc - \dfrac{1}{2}b - \dfrac{1}{2}c + \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(bc - c - b + 1) = \dfrac{1}{2}(b - 1)(c - 1) > 0$

よって $P - Q > 0$, つまり，$P > Q \cdots$①

$Q - R = \dfrac{1}{2}(bc + ca + ab + 3) - (a + b + c)$

a について整理すると，

$Q - R = \left(\dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2} - 1\right)a + \dfrac{1}{2}bc - b - c + \dfrac{3}{2} (= g(a))$

先ほどと同じように考えて，$g(0), g(1)$ の正負を調べる.

$g(0) = \dfrac{1}{2}bc - b - c + \dfrac{3}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(bc - 2b - 2c + 3)$

$= \dfrac{1}{2}\{b(c - 2) - 2(c - 2) - 1\}$

$= \dfrac{1}{2}\{(2 - b)(2 - c) - 1\}$

今，$2 - b > 1, 2 - c > 1$ より，$(2 - b)(2 - c) > 1$ であるから，$g(0) > 0$

$g(1) = -\dfrac{b}{2} - \dfrac{c}{2} + \dfrac{1}{2}bc + \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(b - 1)(c - 1) > 0$

よって，$Q - R > 0$, つまり，$Q > R \cdots$②

①,②より，$P > Q > R$ である.